13η Άσκηση

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $x-1\le f(x)\le x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

α) Αν Α σημείο της C_f και Β το συμμετρικό του ως προς την ευθεία δ: y = x, να βρείτε τη μέγιστη απόσταση των σημείων Α, Β.

β) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της C_f από την ευθεία ε: y = x + 2.

γ) Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3,6]$.

δ) Να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ε) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την παραβολή $y=x^2$ τουλάχιστον μια φορά στο διάστημα $(-1,0)$.

στ) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{x}$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Έστω $A\left(x,f\left(x\right)\right)$, $x\in\mathbb{R}$.Επειδή το Β είναι συμμετρικό του Α ως προς την y = x έχει συντεταγμένες $\left(f\left(x\right),x\right)$. Είναι $d\left(A,B\right)=d\left(x\right)=\left(AB\right)=\sqrt{\left(f\left(x\right)-x\right)^2+\left(x-f\left(x\right)\right)^2}\Leftrightarrow$

$d\left(x\right)=\sqrt{\left(f\left(x\right)-x\right)^2+\left(f\left(x\right)-x\right)^2}=\sqrt{2\left(f\left(x\right)-x\right)^2}=\sqrt{2}\left|f\left(x\right)-x\right|$

Είναι $x-1\le f\left(x\right)\le x+1\Leftrightarrow -1\le f\left(x\right)-x\le 1\Leftrightarrow \left|f\left(x\right)-x\right|\le 1$, άρα $d\left(x\right)=\sqrt{2}\left|f\left(x\right)-x\right|\le\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$.

Επειδή $d\left(0\right)=\sqrt{2}\left|f\left(0\right)-0\right|=\sqrt{2}$, είναι $d\left(x\right)\le d\left(0\right)$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η απόσταση d των Α, Β έχει μέγιστο το $\sqrt{2}$ για x = 0, δηλαδή όταν το Α έχει συντεταγμένες (0,1).

β) Είναι ε: y = x + 2 $\Leftrightarrow x-y+2=0$.

Η απόσταση του τυχαίου σημείου Α της C_f από την ε είναι:

$$d\left(A,\varepsilon\right)=\frac{\left|x-f\left(x\right)+2\right|}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}}=\frac{\left|x-f\left(x\right)+2\right|}{\sqrt{2}}.$$

Είναι $f\left(x\right)-x\le 1\Leftrightarrow x-f\left(x\right)\ge -1\Leftrightarrow x-f\left(x\right)+2\ge 1\Rightarrow \left|x-f\left(x\right)+2\right|\ge 1\Leftrightarrow$

$$\frac{\left|x-f\left(x\right)+2\right|}{\sqrt{2}}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow d\left(A,\varepsilon\right)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Επειδή για x = 0 είναι $d\left(A,\varepsilon\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, η ελάχιστη απόσταση της C_f από την ε είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$ όταν το Α έχει συντεταγμένες (0,1).

γ) Είναι $3-1\le f\left(3\right)\le 3+1\Leftrightarrow 2\le f\left(3\right)\le 4$ και $6-1\le f\left(6\right)\le 6+1\Leftrightarrow 5\le f\left(6\right)\le 7$.

Αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα στο $\left[3,6\right]$, τότε επειδή $3<6$ θα ήταν $f\left(3\right)>f\left(6\right)$ που είναι άτοπο.

Άρα η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[3,6\right]$.

δ) Είναι $f\left(x\right)\le x+1,\ x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1\right)=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$ (1).

Είναι $f\left(x\right)\ge x-1,\ \ x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1\right)=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ (2).

Επειδή η f είναι συνεχής, λόγω των (1), (2), η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ε) Αρκεί η εξίσωση $f\left(x\right)=x^2\Leftrightarrow f\left(x\right)-x^2=0$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $\left(-1,0\right)$.

Έστω $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x^2,\ x\in\left[-1,0\right]$. Είναι $g\left(0\right)=f\left(0\right)=1>0$ και $g\left(-1\right)=f\left(-1\right)-1$.

Για x = 1 είναι: $-1-1\le f\left(-1\right)\le -1+1\Leftrightarrow -2\le f\left(-1\right)\le 0\Leftrightarrow -3\le f\left(-1\right)-1\le -1\Rightarrow g\left(-1\right)<0$.

Επειδή $g\left(0\right)g\left(-1\right)<0$ και η g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το Θ.Bolzano, η εξίσωση $g\left(x\right)=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=x^2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $\left(-1,0\right)$.

στ) Για κάθε x < 0 είναι $\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\ge\frac{f\left(x\right)}{x}\ge\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x}\le\frac{f\left(x\right)}{x}\le 1-\frac{1}{x}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=1$

Για κάθε x > 0 είναι $\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\le\frac{f\left(x\right)}{x}\le\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}\le\frac{f\left(x\right)}{x}\le 1+\frac{1}{x}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))f(x)}{xf(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\right)=1\cdot1=1$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{f(x)}=\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=1.$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{x}=1$